Maths en jeans au lycée Jean Vilar, Villeneuve lez Avignon.

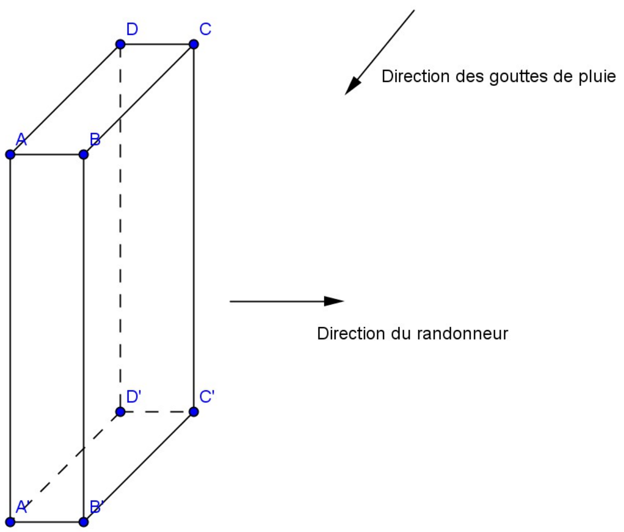
Sujets proposés par Philippe Bolle

Sujet 1. Trouver l'intrus.

On a n billes d'aspect identique. On sait qu'elles sont toutes de même poids, sauf une dont on ne sait pas si elle est plus lourde ou plus légère que les autres. On dispose d'une balance qui permet de comparer les poids de deux groupes de billes. Comment peut-on trouver la bille de poids non conforme avec le moins de pesées possible ?
Donnons une manière un peu différente de formuler le problème : étant donné un entier p supérieur ou égal à 2, à quelle condition sur n peut-on toujours trouver la bille de poids non conforme en au plus p pesées ?
On peut ensuite se poser les mêmes questions lorsqu'on a deux billes (voire plus) de poids non conforme...

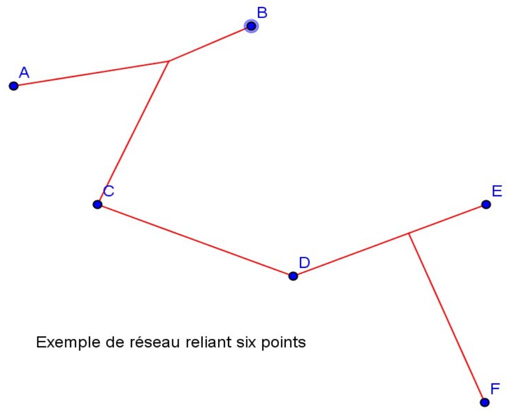
Sujet 2. Courir sous la pluie.

Des randonneurs se font surprendre par une grosse averse. Un abri se trouve à cinq cents mètres, au bout d'un chemin rectiligne. Comment atteindre l'abri en étant le moins mouillé possible ? On peut se dire qu'il faut courir le plus vite possible vers l'abri, mais est-ce toujours vrai ? La direction prise par les gouttes de pluie (il peut y avoir du vent) pourrait entrer en ligne de compte...
On propose de modéliser (de manière un peu grossière) un randonneur par un parallélépipède rectangle de dimensions à préciser, et de tenter le calcul de la quantité d'eau reçue en fonction de certains paramètres : vitesse du randonneur, direction et vitesse des gouttes de pluie, quantité d'eau de pluie par mètre cube...



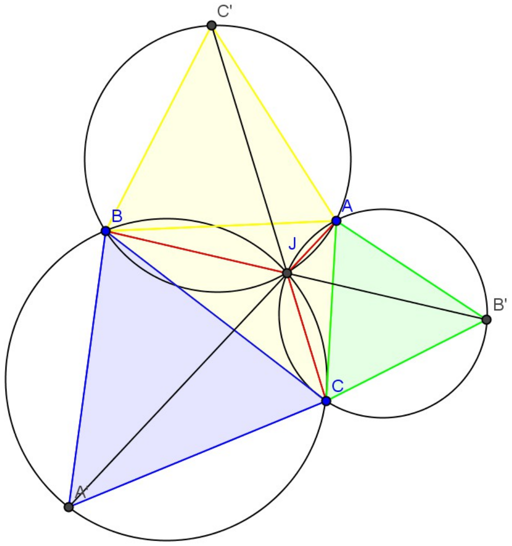
Sujet 3. Relier à moindre coût.

On sait que le chemin le plus court entre deux points du plan est la ligne droite. Si on considère plus de deux points, on peut se demander comment trouver un ensemble de chemins qui relient tous ces points, de longueur totale la plus petite possible. On peut imaginer que ce problème intéresse par exemple une compagnie de télécommunications qui veut créer un réseau reliant certaines villes et qui souhaite minimiser la longueur totale des câbles à installer...



Exemple de réseau reliant six points

Dans le cas de trois points A,B et C, la solution est bien connue : il existe un unique point J du plan qui minimise la somme des distances aux trois points JA+JB+JC, et le réseau optimal est constitué des trois segments [JA], [JB], [JC]. Dans le cas où tous les angles du triangle sont de mesure inférieure à 120° , le point J est appelé point de Fermat ; il a la propriété remarquable que les trois angles formés par les demi-droites [JA), [J,B), [J,C) sont de 120° . Dans le cas où l'un des angles du triangle est de mesure supérieure ou égale à 120° , J est le sommet du triangle de plus grand angle.



Il est proposé de chercher le réseau optimal dans le cas de quatre points qui forment un carré ou un rectangle, puis dans quelques autres exemples. Pour cela, on peut utiliser le résultat sur les triangles pour donner les propriétés d'un réseau optimal.